MN II

Examen I

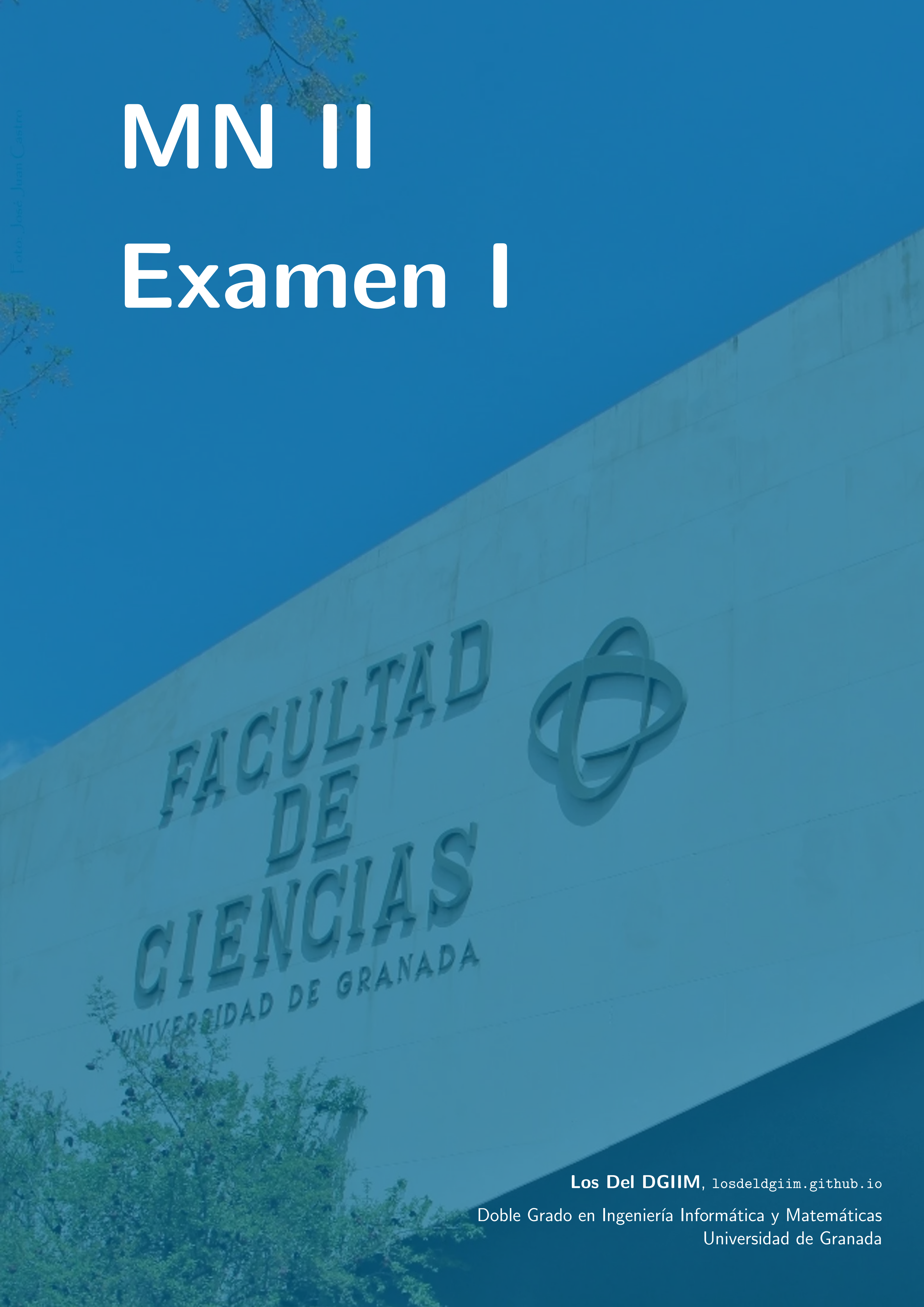

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

MN II
Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Lidia Fernández Rodríguez.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Lidia Fernández Rodríguez.

Descripción Prueba 2. Temas 2 (Integración) y 3.

Fecha 28 de mayo de 2025.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Para calcular la esperanza de una variable aleatoria que sigue una distribución normal es necesario calcular una integral del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x^2}\, dx,$$

por lo que se pretende determinar una fórmula de integración numérica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x^2}\, dx = \alpha_0\, f(x_0) + \alpha_1\, f(x_1) + R(f).$$

1. Determina los nodos y los pesos para que la fórmula anterior tenga grado de exactitud máximo. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

2. Obtén una expresión del error de dicha fórmula.

3. Utiliza la fórmula anterior para estimar el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\, e^{-x^2}\, dx.$$

Observación. Puede resultar de utilidad conocer los valores de las siguientes integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1}\, e^{-x^2}\, dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-x^2}\, dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Para resolver el PVI (1) se propone el método

$$x_{n+1} \;=\; x_n \;+\; \frac{2}{3}\, h\, f\big(t_{n+1}, x_{n+1}\big) \;+\; \frac{1}{3}\, h\, f\big(t_n, x_n\big).$$

1. ¿Es un método convergente?

2. ¿Se puede obtener dicho método a partir de una fórmula de cuadratura? En caso afirmativo, indica cuál es la fórmula utilizada e indica si dicha fórmula es de tipo interpolatorio clásico.

3. ¿Utilizarías el método para resolver un problema en el que $f(t,x) = \lambda x$ con $\Re(\lambda) < 0$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Considera la siguiente fórmula de cuadratura:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{4}\, f(a) + \frac{3(b-a)}{4}\, f\big(x_1\big) + R(f), \;\; \text{donde } x_1 = a + \tfrac{2}{3}(b-a)$$

1. Teniendo $x_1 = a + \frac{2}{3}(b-a)$, comprueba que la fórmula es de tipo interpolatorio clásico y proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

2. Suponiendo que es posible evaluar la función f en cualquier punto del intervalo de definición, deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula incluyendo una expresión del error.

3. Deduce a partir de dicha fórmula, deduce un método de tres pasos lineal para aproximar la solución del PVI
$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = \mu. \end{cases} \tag{1}$$

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Para aproximar la solución del PVI (1) se considera el método multipaso
$$x_{n+3} = x_n \ + \ h\big(\beta_3\, f_{n+3} + \beta_1\, f_{n+1}\big).$$

1. ¿Qué relaciones deben existir entre los parámetros β_1 y β_3 para que el método anterior sea convergente? Justifica tu respuesta.

2. Calcula los coeficientes β_1 y β_3 para que el orden de convergencia sea máximo. Indica el orden de convergencia y el término principal del error local de truncatura local.

3. Se pretende utilizar un método predictor–corrector para aproximar $x(1)$ donde $x(t)$ es la solución del PVI
$$\begin{cases} x' = x + t, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$
Para ello, con $h = 1/4$, utiliza el método de Euler para disponer de los valores iniciales que necesites. A continuación, utiliza un método predictor-corrector donde el predictor es el método de Euler y el corrector es el método anterior con una única corrección en cada paso, y realiza las iteraciones que consideres oportunas. ¿Qué orden tiene este método predictor–corrector? ¿Cuál sería el número óptimo de correcciones?